E. N. S. A. I. T _1992.

Epreuve de Mathématiques 2

Les parties II ET III sont indépendantes entre elles

Notations

E désignera un R - espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E.

On rappelle qu'un projecteur p de E est un endomorphisme de E caractérisé par $p \circ p = p$.

Dans le cas où p est un projecteur de E, on a alors : $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Si $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ est une matrice carrée d'ordre n, on appelle trace de A le réel $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Si f est un endomorphisme de E, on appelle trace de f, noté Tr f, la trace d'une matrice de f dans une base de E.

f^n désignera la composée de f par lui-même n fois.
f^2 désignera donc $f \circ f$.

Pour f et g endomorphismes de E, on pose : $\psi_g(f) = f \circ g - g \circ f$. ψ_g est donc un endomorphisme de L(E).

On s'intéresse à quelques propriétés des couples (f, g) d'endomorphismes de E vérifiant $\psi_g(f) = 0$ ou $\psi_g(f) = \alpha f + \beta g$ avec α et β réels, lorsque f est un projecteur ou lorsque f et g sont deux projecteurs.

page 368 2/4 1992.
E. N. S. A. I T Math 2

I

Préliminaires

1.1 Soit f élément de $\mathcal{P}(E)$.

Montrer que : $\mathrm{Im} f = \{ x \in E / f(x) = x \}$

Donner Tr f, en fonction de rg f.

1.2 Pour A et B matrices réelles carrées d'ordre n, montrer que Tr AB = Tr BA. En déduire que Tr $\psi_g(f) = 0$. Que peut-on en déduire pour le couple (f, g) d'endomorphismes de E solution de $\psi_g(f) = \alpha f$ avec α réel non nul et f élément de $\mathcal{P}(E)$?

1.3 Soit $\mathfrak{R}$ la relation binaire définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$\forall (p, q) \in \mathcal{P}(E)^2 \qquad p \,\mathfrak{R}\, q \iff p \circ q = q \circ p = p$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$

1.4 On prend ici $E = R^4$, et p_o un endomorphisme de E dont la matrice A dans la base canonique de E est :

$$A = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4.1 Montrer que p_o est un projecteur de E dont on déterminera le rang, une base de l'image et une base du noyau.

1.4.2 On désigne par $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle p_o admet pour matrice

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } r = \mathrm{rg}\ p_o$$

en adoptant la notation de matrices blocs, I_r désignant la matrice carrée identité d'ordre r.

Par exemple, si r = 2, on aura

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer, dans cette même base $\mathcal{B}$, la matrice d'un projecteur q vérifiant $p_o \,\mathfrak{R}\, q$.

II

Dans toute cette partie, on considère un couple (f, g) d'endomorphismes de E solution de $\psi_g(f) = 0$.

2.1 On suppose de plus que f est un élément de $\mathcal{P}(E)$.

2.1.1 Montrer que Imf et Ker f sont stables par g.
2.1.2 Montrer que cette condition est également suffisante, à savoir :

Si g est un endomorphisme de E, si f est un élément de $\mathcal{P}(E)$, si Ker f et Imf sont stables par g alors (f, g) est solution de $\psi_g(f) = 0$.

2.1.3 Soit p_0 le projecteur de la question 1.4

Déterminer dans la base $\mathcal{B}$ la matrice d'un endomorphisme g quelconque solution de $\psi_g(p_0) = 0$.

2.2 On suppose maintenant que f et g sont éléments de $\mathcal{P}(E)$.

2.2.1 Montrer que : $(f \circ g)$ et $(f + g - f \circ g)$ sont deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.
2.2.2 Montrer que : $(f \circ g)\ \mathcal{R}\ f$
$(f \circ g)\ \mathcal{R}\ g$
$f\ \mathcal{R}\ (f + g - f \circ g)$
et $g\ \mathcal{R}\ (f + g - f \circ g)$

avec $\mathcal{R}$ définie au 1.3

2.2.3 On rappelle qu'une partie de A de $\mathcal{P}(E)$, ordonné par la relation $\mathcal{R}$, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M dans $\mathcal{P}(E)$ si :

i) $\forall p \in A$, $m\ \mathcal{R}\ p$ et $p\ \mathcal{R}\ M$

ii) $\forall q \in \mathcal{P}(E)$

- si $\forall p \in A$, $q\ \mathcal{R}\ p$ alors $q\ \mathcal{R}\ m$
- si $\forall p \in A$, $p\ \mathcal{R}\ q$ alors $M\ \mathcal{R}\ q$

Montrer que l'ensemble $\{f, g\}$ admet dans $\mathcal{P}(E)$ une borne inférieure m_0 et une borne supérieure M_0 à préciser.

III

Dans toute cette partie, on considère un couple (f, g) d'endomorphismes de E solution de $\psi_g(f) = \alpha f + \beta g$ avec α et β deux réels.

3.1 On suppose de plus que $\beta = 0$ et que $\alpha \neq 0$.
On veut montrer que f est forcément nilpotent, c'est à dire $\exists n \in N^* / f^n = 0$.

3.1.1 Montrer que : $\forall k \in N^* \quad f^k \circ g - g \circ f^k = \alpha k f^k$ En déduire $\psi_g(f^k)$.
3.1.2 On raisonne par l'absurde. On suppose donc dans cette question que :
$\forall k \in N^*$, $f^k \neq 0$. Montrer que ψ_g admet une infinité de valeurs propres.
3.1.3 Conclure que f est nilpotente.
3.1.4 Retrouver le résultat du I 1.2 à savoir tous les couples (f, g) solution de
$\psi_g(f) = \alpha f$ avec f élément de $\mathcal{P}(E)$ et α réel non nul.

3.2 On suppose maintenant que f et g sont deux éléments distincts non nuls de $\mathcal{P}(E)$ et que α et β sont deux réels.

3.2.1 On suppose dans cette question : $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.
a) Montrer que :
$2\alpha\, g \circ f + \beta(1+\alpha) g = \alpha(1-\alpha) f$.

En déduire que: Img $\supset$ Imf
Montrer alors que : $g \circ f = f$
b) Montrer les résultats suivants : $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = -1$, Imf $\supset$ Img

3.2.2 Vérifier qu'un couple (f, g) de projecteurs de E vérifiant :
$g \circ f = f$ et Imf $\supset$ Img est solution de $\psi_g(f) = -f + g$.

3.2.3 Soit p_o le projecteur de la question 1.4. Trouver, dans la base $\mathcal{B}$, l'écriture matricielle d'un projecteur g quelconque non nul vérifiant :
$\psi_g(p_o) = -p_o + g$.

3.2.4 On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$.

Montrer les résultats suivants : Kerf $\supset$ Kerg , $f \circ g = f$, $\alpha + \beta = 0$
$\alpha = 1$, Kerg $\supset$ Kerf

3.2.5 Vérifier qu'un couple (f, g) de projecteurs de E vérifiant :
$f \circ g = f$ et Kerg $\supset$ Kerf , est solution de $\psi_g(f) = f - g$.

3.2.6 Soit p_o le projecteur de la question 1.4. Trouver, dans la base $\mathcal{B}$, l'écriture matricielle d'un projecteur g quelconque non nul vérifiant :
$\psi_g(p_o) = p_o - g$.